

## زاویه‌های مرکزی

به نام خدا

درس امروز درباره زاویه‌های مرکزی هست.

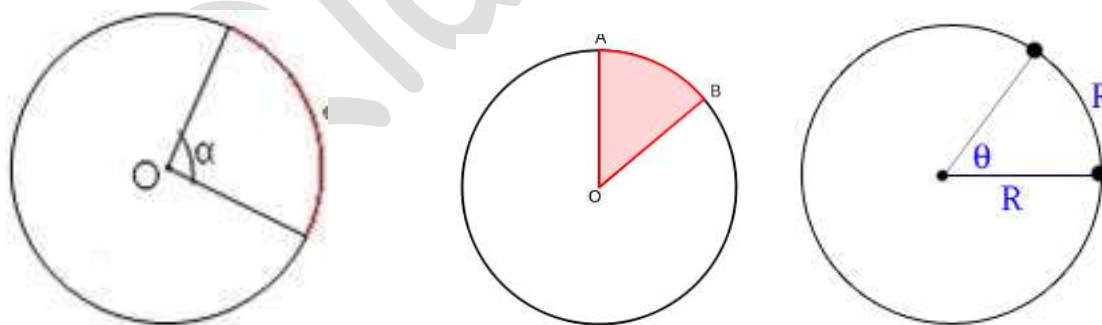
### زاویه‌های مرکزی :

زاویه مرکزی به تعریف دایره و یه نکته مهم . و همه سوالات مربوط به زاویه مرکزی با این نکته مهم حل میشن 😊

### تعریف زاویه مرکزی:

زاویه مرکزی زاویه ای که راس اون روی مرکز دایره قرار داره.

زاویه‌های زیر نمونه هایی از زاویه‌های مرکزی هستن:



همینطور که می‌بینید ، راس همه این زاویه‌ها روی مرکز دایره قرار داره.

قبل از اینکه نکته مربوط به زاویه‌های مرکزی رو بگیریم، یه نکته رو یادآوری می‌کنیم:

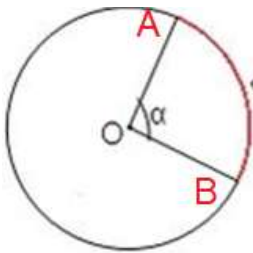
کل دایره یه کمان بسته‌س که اندازه اون  $360^\circ$  درجه هست.

نکته مهم مربوط به زاویه های مرکزی:

اندازه هر زاویه مرکزی با کمان مقابلش برابر است.

مثال:

در شکل زیر اندازه زاویه  $\alpha$  برابر  $50^\circ$  درجه است، اندازه کمان روبروی این زاویه چقدر است؟

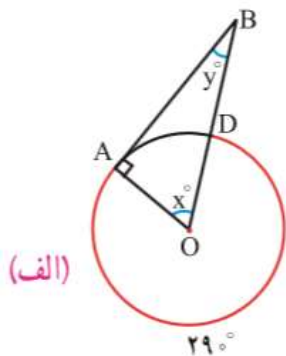


چون زاویه  $\alpha$  زاویه مرکزی پس اندازه اش با کمان روبروش برابر است، بنابراین اندازه کمان AB که روبروی این زاویه قرار دارد هم برابر  $50^\circ$  درجه است. آیا می توانیم اندازه کمان بزرگتر رو هم مشخص کنیم؟

بله، کل دایره  $360^\circ$  درجه است، اندازه کمان کوچک هم  $50^\circ$  درجه است، بنابراین اندازه کمان بزرگتر برابر است با:

$$360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$$

اندازه کمان و زاویه های مجهول را پیدا کنید.



اندازه کمان بزرگتر ۲۹۰ درجه‌س. کل دایره هم که گفتیم ۳۶۰ درجه‌س. بنابراین اندازه کمان کوچکتر AD برابر با:

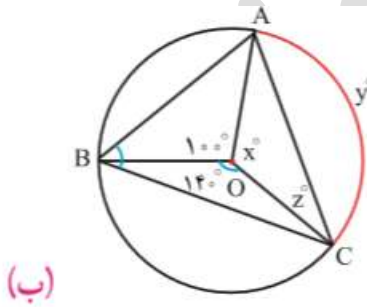
$$AD = 360 - 290 = 70$$

زاویه X به زاویه مرکزی و روبروی کمان AD، بنابراین اندازه زاویه X هم برابر با ۷۰ می‌دونیم که مجموع زاویه‌های داخلی یه مثلث ۳۶۰ درجه‌س، زاویه A هم که ۹۰ درجه‌س بنابراین اندازه زاویه Y برابر با:

$$Y = 180 - 70 - 90 = 20$$

در اینجا خود سوال اندازه زاویه A رو به ما گفته، اما اگر نمی‌گفت هم ما می‌تونستیم بفهمیم که زاویه قائمه‌س. بطوری؟

مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است. پس AB که مماسه، بر AO که شعاعه عموده.



کمان AB روبروی زاویه مرکزی ۱۰۰ درجه‌س، بنابراین اندازه کمان AB هم برابر ۱۰۰ درجه همیشه.

کمان BC روبروی زاویه مرکزی ۱۴ درجه‌س، بنابراین اندازه کمان BC هم برابر ۱۴ درجه همیشه.

فب کل دایره ۳۶۰ درجه‌س، اندازه دو تا کمان رو هم پیدا کردیم. پس اندازه کمان AC یا کمان Y برابر با:

$$360 - 100 - 140 = 120$$

اندازه کمان AC برابر ۱۲۰ شد، زاویه مرکزی X روبروی این کمان قرار داره، بنابراین اندازه زاویه X هم برابر ۱۲۰ درجه میشه.

تنها مجهولی که باقی مونده زاویه Z هست. بطوری به دستش بیاریم؟

اگه دقت کنیم می‌بینیم که مثلث AOC یه مثلث متساوی‌الساقینه. چرا؟

چون دو تا از ضلع‌های مثلث، شعاع دایره هستن و با هم برابرن.

از سه تا زاویه‌ی این مثلث فقط یکیش رو داریم. جمع سه زاویه مثلث هم که برابر ۱۸۰ درجه‌س. پس داریم:

$$A_1 + x + z = 180$$

به جای x مقدارش رو قرار میدیم:

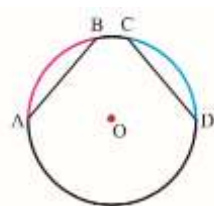
$$A_1 + 120 + z = 180$$

بنابراین:

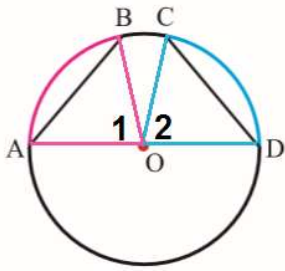
$$A_1 + z = 180 - 120 \rightarrow A_1 + z = 60$$

جمع دو تا زاویه‌ی هم اندازه برابر ۶۰ شده پس هر کدوم از اونها ۳۰ درجه هستن.

$$A_1 = z = 30$$



الف) فرض کنید  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .  
چرا  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ؟



با استفاده از شعاع‌های دایره، دو تا مثلث می‌سازیم؛  
 اگر بتونیم ثابت کنیم دو مثلث OAB و COD هم‌نوشتن،  
 اونوقت می‌تونیم نتیجه بگیریم که اضلاع متناظر اون‌ها یعنی  
 AB و CD هم با هم برابرن.

پس میریم که ثابت کنیم دو تا مثلث هم‌نوشتن ☺

کمان‌های AB و CD با هم برابرن، پس زاویه‌های مرکزی  $O_1$  و  $O_2$  هم که روبروی این  
 کمان‌ها هستن با هم مساوین. بنابراین:

$$O_1 = O_2$$

می‌دونیم که شعاع‌های یه دایره همه با هم برابرن. بنابراین:

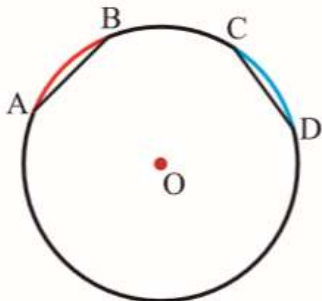
$$AO = OD$$

$$OB = OC$$

پس دو مثل بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین با هم هم‌نوشتن.

چون دو مثلث هم‌نوشتن هستند پس اجزای متناظر اون‌ها با هم برابره. در نتیجه:

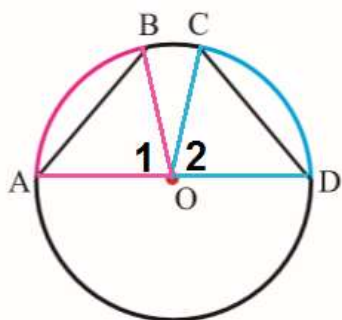
$$AB = CD$$



ب) فرض کنید  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

چرا  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ؟

در اینجا هم ابتدا شعاع‌های دایره رو رسم می‌کنیم تا  
 دو تا مثلث ساخته بشه:



پیزی که سوال از ما خواسته اینه که ثابت کنیم کمانهای AB و CD با هم برابرن.

ما اگه بتونیم ثابت کنیم که زاویه‌های مرکزی  $O_1$  و  $O_2$  با هم برابرن، اونوقت می‌تونیم نتیجه بگیریم که کمانهای AB و CD هم که روبروی این زاویه‌ها هستن با هم برابرن.

خب حالا بطوری ثابت کنیم که  $O_1$  و  $O_2$  با هم برابرن؟ با استفاده از همنوشتی مثلثا در واقع اگه بتونیم ثابت کنیم که دو مثلث با هم برابرن، اونوقت می‌تونیم نتیجه بگیریم که زاویه‌های متناظر دو مثلث یعنی  $O_1$  و  $O_2$  هم با هم برابرن.

پس میریم که ثابت کنیم دو تا مثلث همنوشتن 😊

طبق پیزی که خود سوال گفته، اضلاع AB و CD با هم برابرن.

$$AB = CD$$

می‌دونیم که شعاع‌های یه دایره همه با هم برابرن. بنابراین:

$$AO = OD$$

$$OB = OC$$

پس دو مثل بنا به حالت "سه ضلع" با هم همنوشتن.

چون دو مثلث همنوشت هستند پس اجزای متناظر اونوا با هم برابره. در نتیجه:

$$O_1 = O_2$$

چون  $O_1$  و  $O_2$  زاویه‌های مرکزی هستن و با هم برابرن، نتیجه می‌گیریم که کمانهای روبروی این دو زاویه هم با هم برابر هستن. یعنی:

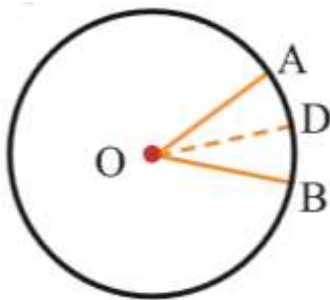
$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم :

اگر در یک دایره اندازه دو کمان برابر باشد، وترهای نظیر آن دو کمان هم با هم برابر خواهند بود و برعکس. یعنی:

اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، کمانهای نظیر آن دو وتر نیز با هم برابر خواهند بود.

۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و  $\widehat{AOB} = 36^\circ$ . اندازه هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟



صورت سوال به ما گفته که زاویه AOB برابر  $36^\circ$  درجه است

و خط OD نیمساز این زاویه است. پس نتیجه می‌گیریم که

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOD} = 18^\circ$$

هر دو این زاویه‌ها، زاویه‌های مرکزی هستند. پس با

کمانهای روبروی خود برابرند. بنابراین:

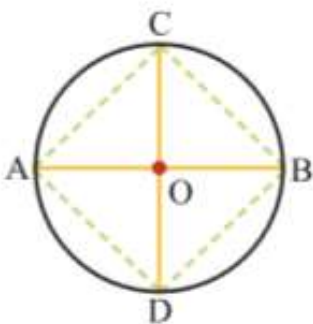
$$AD = BD = 18^\circ$$

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند.

الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟

ب) آیا وترهای AC، CB، BD و DA نیز با هم مساوی‌اند؟

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADCB با هم مساوی‌اند؟ چرا؟



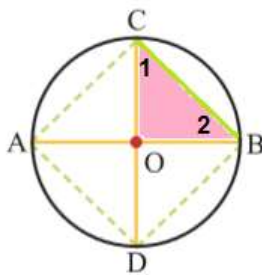
الف:

دو قطر بر هم عمود شدن، پس اندازه هر کدوم از زاویه‌های مرکزی ایجاد شده برابر  $90^\circ$  درجه هست. پس کمانهای روبروی این زاویه‌ها هم  $90^\circ$  درجه هستند.

ب: بله

چهار مثلث ایجاد شده، بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین همنهشت هستند (ضلع‌ها با هم برابرند چون شعاعهای دایره هستند و زاویه‌های بین اضلاع هم که  $90^\circ$  درجه‌س). بنابراین اجزای متناظر اونها هم با هم برابر میشه. یعنی وترهای AC و CB و BD و DA با هم برابرند.

ج: بله



مثلث OCB رو در نظر بگیریم.

در این مثلث زاویه O برابر  $90^\circ$  درجه‌س.

مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث هم برابر  $180^\circ$  درجه‌س.

$$C_1 + B_1 = 90$$

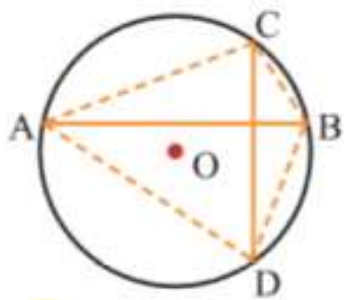
از طرفی این مثلث یه مثلث متساوی‌الساقینه (چون اضلاع مثلث شعاعهای دایره هستند)، پس زاویه‌های  $C_1$  و  $B_1$  با هم برابرند. در نتیجه:

$$C_1 = B_1 = 45$$

این استدلال رو می‌تونیم برای سه مثلث دیگه هم استفاده کنیم، بنابراین:

$$A = B = C = D = 90$$





۵- در شکل روبه‌رو، وترهای AB و CD بر هم عمودند.  
 الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟  
 ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.  
 این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟

الف: خیر؛ در سوال قبل ۴ زاویه مرکزی مساوی ایجاد شده بود بنابراین نتیجه گرفتیم که کمانهای روبه‌روی این زاویه‌ها با هم برابر. اما در اینجا زاویه مرکزی ایجاد نشده و هیچ دلیلی برای تساوی کمانها نداریم.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

[www.riazibaham.ir](http://www.riazibaham.ir)

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam8

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثالی حل شده، به "ریاضی با هم" بپیوندید.